

## TH2 – Diffusion de particules

### A - Travaux dirigés

#### TH21 – Diffusion de particules dans un axone

1. Une loi phénoménologique est une loi empirique. Les lois de Fick pour la diffusion de particules, de Fourier pour la diffusion thermique (Cf. chapitre suivant), d'Ohm pour la conduction électrique en régime lentement variable (Cf. cours d'électromagnétisme) sont des exemple de lois phénoménologiques.

2. Effectuons un bilan de particules (en moles) dans la tranche d'axone de surface de base  $S$  comprise entre les plans d'abscisse  $x$  et  $x + dx$ , entre  $t$  et  $t + dt$  (on appelle  $\vec{j}$  le vecteur densité de courant de particules) :

- à l'instant  $t$ , il y a :  $dN(t) = c(x, t)Sdx$  moles de particules ;
- à l'instant  $t + dt$ , il y en a :  $dN(t + dt) = c(x, t + dt)Sdx$  ;
- entre  $t$  et  $t + dt$ , il entre en  $x$  :  $\delta N_e = j(x, t)Sdt$  moles de particules dans le système ;
- il en sort en  $x + dx$  :  $\delta N_s = j(x + dx, t)Sdt$  ;
- il en disparaît pendant la même durée :  $\delta N_p = \alpha dxdt$ .

Le bilan du nombre de moles de particules s'écrit :

$$dN(t + dt) = dN(t) + \delta N_e - \delta N_s - \delta N_p,$$

soit, après développement limité et simplification par  $dxdt$  :  $\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\alpha}{S} = 0$ . En utilisant la loi de Fick, on peut remplacer  $j$  par  $-D\frac{\partial c}{\partial x}$ , ce qui donne :  $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{S}$ .

3. En régime permanent, l'équation précédente s'écrit :  $D\frac{d^2c}{dx^2} = \frac{\alpha}{S}$ .

Cette équation s'intègre en :  $\frac{dc}{dx} = \frac{\alpha x}{SD} + K$  où  $K$  est une constante. Or les particules ne peuvent pas sortir de l'axone donc  $j(x = L) = 0$  ou encore :  $\frac{dc}{dx}(L) = 0$ . On obtient alors l'équation :  $\frac{dc}{dx} = \frac{\alpha(x - L)}{SD}$ , qui s'intègre, compte tenu de l'hypothèse  $c(0) = c_0$ , en :

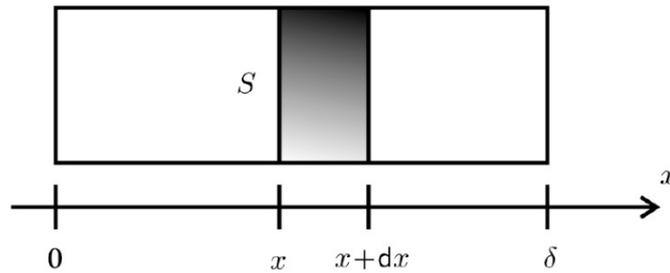
$$c(x) = \frac{\alpha x^2}{2SD} - \frac{\alpha Lx}{SD} + c_0.$$

La concentration est minimale en  $x = L$ . La concentration étant une grandeur positive, la longueur maximale de l'axone est donnée par la condition :  $c(L) > 0$ , c'est-à-dire :

$$L > L_{\max} = \frac{2SDc_0}{\alpha}.$$

## TH22 – Diffusion dans un cylindre

1. On effectue un bilan de particules pendant  $dt$  sur un volume de section  $S$  compris entre  $x$  et  $x + dx$  :



La variation du nombre de particules pendant  $dt$  est égale au nombre de particules qui rentrent pendant  $dt$  – le nombre de particules qui sortent pendant  $dt$  + le nombre de particules qui sont produites pendant  $dt$ .

- On appelle  $d^2N$  la variation du nombre de particules pendant  $dt$ . À l'instant  $t$ , le nombre de particules est  $n(t)Sdx$ . À l'instant  $t + dt$ , le nombre de particules est  $n(t + dt)Sdx$ . On a donc :

$$d^2N = (n(t + dt) - n(t)) Sdx = \frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx$$

- Ce qui rentre pendant  $dt$  à l'abscisse  $x$  :  $j_D(x) Sdt$ .
- Ce qui sort pendant  $dt$  à l'abscisse  $x + dx$  :  $j_D(x + dx) Sdt$ .
- Il n'y a pas de particules produites dans le volume  $Sdx$ .

Le bilan de particules s'écrit donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx = j_D(x) Sdt - j_D(x + dx) Sdt = -\frac{\partial j_D}{\partial x} Sdx dt$$

La loi de Fick s'écrit :

$$\vec{j}_D = -D \vec{\text{grad}} n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x$$

On obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

La généralisation avec la Laplacien s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

2. On en déduit l'équation aux dérivées partielles avec les coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} D \frac{\partial (r \frac{\partial n}{\partial r})}{\partial r}$$

En régime stationnaire, on a :

$$\frac{d\left(r \frac{dn}{dr}\right)}{dr} = 0$$

On a donc :  $r \frac{dn}{dr} = A$

On sépare les variables :  $dn = A \frac{dr}{r}$ . Soit :

$$n = A \ln r + B$$

On a deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$ . Il faut donc deux conditions aux limites.

En régime permanent, sans terme de création, on a conservation du flux de particules à travers un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $r$  (avec  $r$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$ ).

Le flux de particules est :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{j}_D \cdot \vec{dS} = j_D 2\pi r h = -D \frac{dn}{dr} 2\pi r h = -D \left(\frac{A}{r}\right) 2\pi r h \\ &= -2\pi A h D \end{aligned}$$

Le flux de particules ne dépend pas de  $r$ .

On a deux conditions aux limites :

- Continuité de la densité particulaire pour  $r = R_1$  :

$$n_1 = A \ln R_1 + B$$

- Continuité du flux de particules pour  $r = R_1$  :

$$\Phi = j_{D1} 2\pi R_1 h = -2\pi A h D$$

On a donc :

$$\begin{cases} A = -j_{D1} R_1 \\ B = n_1 + \frac{j_{D1} R_1}{D} \ln R_1 \end{cases}$$

On a finalement :

$$n = -\frac{j_{D1} R_1}{D} \ln r + n_1 + \frac{j_{D1} R_1}{D} \ln R_1 = -\frac{j_{D1} R_1}{D} \ln \frac{r}{R_1} + n_1$$

Le vecteur densité de flux de particules est :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = j_{D1} \frac{R_1}{r} \vec{u}_r$$

## B – Exercices supplémentaires

### TH23 – Perturbation sinusoïdale de concentration

1.  $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ .

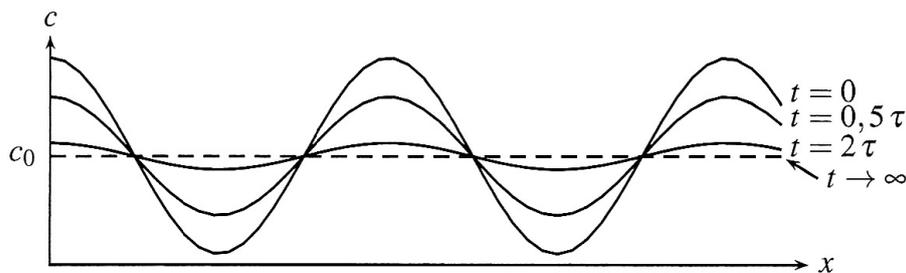
2. Avec la solution proposée :  $f'(t) \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = -D \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 f(t) \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$

Cette équation est vraie  $\forall x$  donc  $f'(t) + D \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 f(t) = 0$ , qui s'écrit  $\tau \frac{df}{dt} + f = 0$  où

$\tau = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 D}$ , et s'intègre en  $f(t) = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  et avec  $f(0) = c_1$  :  $f(t) = c_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ .

$\tau$  est le **temps caractéristique de diffusion** du sucre dans l'eau.  $x \mapsto \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$  opère sur une variable adimensionnée et renvoie un nombre adimensionné. Ainsi  $[\lambda] = \text{m}$ . De plus,  $[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . D'où  $\tau$  est en secondes.

3. On obtient les graphes :



## TH24 – Partage entre deux solvants

1.

a) L'équation locale de conservation de la matière s'écrit :  $\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$ 

Or :  $\vec{j} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$

b) En régime permanent  $n(x) = \frac{n_2 - n_1}{l} x + n_1$  d'où :  $\vec{j} = D \frac{n_1 - n_2}{l} \vec{u}_x$ . Or :  $\phi = jS \Rightarrow \phi = DS \frac{n_1 - n_2}{l}$ 

2.

a) On a :  $N(0) = N(t) \Rightarrow n_0 h_2 = n_1 h_1 + n_2 h_2$ b) Pour le flux d'iode, eau vers l'interface : ( $l \rightarrow l_2, n_1 \rightarrow n_2$  et  $n_2 \rightarrow n_2^*$ ) :

$$\phi = \frac{D_2 S}{l_2} (n_2 - n_2^*)$$

Et pour le flux d'iode, benzène vers l'interface : ( $l \rightarrow l_1, n_1 \rightarrow n_1^*$  et  $n_2 \rightarrow n_1$ )

$$\phi = \frac{D_1 S}{l_1} (n_1^* - n_1)$$

3.

a) Les deux flux sont équivalents :  $\frac{D_2 S}{l_2} (n_2 - n_2^*) = \frac{D_1 S}{l_1} (n_1^* - n_1) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} (n_2 - n_2^*) = \frac{1}{l} (Kn_2^* - n_1)$ 

$$\Leftrightarrow n_1 = Kn_2^* - \frac{1}{\alpha} (n_2 - n_2^*) = n_2^* \left( K + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{n_2}{\alpha}$$

Or :  $n_0 h_2 = n_1 h_1 + n_2 h_2 \Leftrightarrow n_0 = \frac{1}{\alpha} n_1 + n_2 \Leftrightarrow n_1 = \alpha (n_0 - n_2)$ Donc :  $\alpha (n_0 - n_2) = n_2^* \left( K + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{n_2}{\alpha} \Leftrightarrow n_2^* \left( K + \frac{1}{\alpha} \right) = \alpha (n_0 - n_2) + \frac{n_2}{\alpha}$ 

$$\Leftrightarrow n_2^* = \frac{\alpha (n_0 - n_2) + \frac{n_2}{\alpha}}{K + \frac{1}{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow n_2^* = \frac{\alpha^2 (n_0 - n_2) + n_2}{1 + \alpha K} \text{ et } n_1^* = K \frac{\alpha^2 (n_0 - n_2) - n_2}{1 + \alpha K}$$

b) On a :  $-\frac{dn_2}{dt} = \phi$ 

$$\Leftrightarrow -\frac{dn_2}{dt} S h_2 = \frac{D_2 S}{l_2} (n_2 - n_2^*)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dn_2}{dt} \alpha h = \frac{D}{\alpha l} (n_2 - n_2^*)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dn_2}{dt} = \frac{D}{\alpha^2 h l} \left( n_2 - \frac{\alpha^2 (n_0 - n_2) + n_2}{1 + \alpha K} \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dn_2}{dt} = \frac{D}{\alpha^2 h l} \left( n_2 \left( 1 + \frac{-1 + \alpha^2}{1 + \alpha K} \right) - \frac{\alpha^2 n_0}{1 + \alpha K} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dn_2}{dt} + n_2 \left( \frac{D}{\alpha^2 h l} \left( \frac{\alpha K + \alpha^2}{1 + \alpha K} \right) \right) = \frac{D}{h l} \frac{n_0}{1 + \alpha K}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dn_2}{dt} + n_2 \left( \frac{D}{\alpha h l} \left( \frac{K + \alpha}{1 + \alpha K} \right) \right) = \frac{D}{h l} \frac{n_0}{1 + \alpha K}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dn_2}{dt} + \frac{n_2}{\tau} = \frac{D}{h l} \frac{n_0}{1 + \alpha K} \text{ et } \tau = \frac{\alpha h l}{D} \frac{1 + \alpha K}{\alpha + K}$$

c)  $\Rightarrow \tau = 5 \cdot 10^6 \text{ s} = 57 \text{ j}$

## TH25 – Diffusion de molécules à travers une membrane

1) La loi de Fick s'écrit de façon identique pour les grandeurs molaires et moléculaires, soit :

$$J_D = -D \frac{\partial c}{\partial x}$$

De plus  $c$  est une fonction affine de  $x$ .

On obtient immédiatement pour un pore (et pour les grandeurs molaires) :

$$c(x, t) = (c_2 - c_1) \frac{x}{e} + c_1 \text{ et } j_D = -D \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D}{e} (c_1 - c_2);$$

d'où une densité de flux pour l'ensemble de la membrane :

$$j_m = n\pi r^2 j_D = n\pi r^2 \frac{D}{e} (c_1 - c_2)$$

qui est de la forme  $j_m = K\Delta c$ , avec  $K = n\pi r^2 \frac{D}{e}$ .

( $j_m$  correspond bien à un flux par unité de surface, puisque  $n$  est un nombre de pores par unité de surface.)

2)  $r = 0,56 \mu\text{m}$ .

3) On écrit la conservation, à un instant  $t$ , des flux molaires, à l'entrée et à la sortie de la membrane (le flux est indépendant de  $x$ ), en prêtant attention aux signes :

$$-V_1 \frac{dc_1}{dt} = j_m S = V_2 \frac{dc_2}{dt}.$$

En combinant ces deux équations et en utilisant  $j_m = K\Delta c$ , il vient :

$$\frac{d(\Delta c)}{dt} = -KS \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \Delta c = -\frac{\Delta c}{T}.$$

4) La solution de cette équation s'écrit, compte tenu de la condition initial :

$$\Delta C = \Delta C_0 \text{ à } t = 0 : \Delta C = \Delta C_0 e^{-\frac{t}{T}}.$$

La différence de concentration est égale au dixième de sa valeur initiale après un temps  $t_{10} = 10 \ln T$ , soit  $t_{10} = 21 \text{ h } 20 \text{ min}$ .

## TH26 – Transport diffusif de glucose dans l'axone

1. Faisons un bilan du nombre de molécules de glucose G sur une tranche comprise entre  $x$  et  $x+dx$ , entre les instants  $t$  et  $t+dt$ , en notant  $S$  la section du tube :

$$\begin{aligned} dN_G(t+dt) - dN_G(t) &= \delta N_{G,entrant} - \delta N_{G,sortant} - \delta N_{G,consommé} \\ \Leftrightarrow ([G](x,t+dt) - [G](x,t))Sdx &= j_N(x,t)Sdt - j_N(x+dx;t)Sdt - \alpha dxdt \end{aligned}$$

On divise par  $S dx dt$  pour faire apparaître les dérivées partielles :

$$\frac{\partial [G]}{\partial t} = -\frac{\partial j_N}{\partial x} - \frac{\alpha}{S}$$

Avec la loi de Fick  $j_N = -D \frac{\partial [G]}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial [G]}{\partial t} = D \frac{\partial^2 [G]}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{S}$

Le neurone devant fonctionner en continu toute la journée, on suppose le régime stationnaire :

$$D \frac{\partial^2 [G]}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{S} > 0 \Rightarrow [G](x) = \frac{\alpha}{2DS} x^2 + Bx + C$$

Condition aux limites :  $[G](0) = [G]_0 = C$

À l'autre extrémité, en  $x = L$ , on peut supposer que la diffusion s'arrête :

$$\begin{aligned} j_N(L) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial [G]}{\partial x}(L) = 0 \Rightarrow B + \frac{\alpha}{DS} L = 0 \Rightarrow B = -\frac{\alpha}{DS} L \\ \Rightarrow [G](x) &= \frac{\alpha}{2DS} x^2 - \frac{\alpha}{DS} Lx + [G]_0 \\ \Rightarrow [G](x) &= [G]_0 + \frac{\alpha}{DS} \left( \frac{x^2}{2} - xL \right) \end{aligned}$$

Le profil de  $[G](x)$  est donc parabolique, avec la concavité vers le haut, et l'hypothèse ci-dessus revient à dire que la concentration est minimale en  $x = L$ . Or ce minimum doit être positif :

$$\begin{aligned} [G](L) = [G]_0 + \frac{\alpha}{DS} \left( \frac{L^2}{2} - L^2 \right) > 0 &\Rightarrow [G]_0 - \frac{\alpha L^2}{2DS} > 0 \\ \Rightarrow L^2 > \frac{2DS[G]_0}{\alpha} &\Rightarrow L > \sqrt{\frac{2DS[G]_0}{\alpha}} \end{aligned}$$

Ainsi un axone de diamètre de l'ordre de  $1 \mu m$ , donc tel que  $\sqrt{S} = 1 \mu m$ , peut avoir une longueur de l'ordre de  $L = 100 \mu m$ , ce qui correspond bien aux valeurs réellement observées.

2. La cinétique très rapide de la réaction permet de supposer que les concentrations des trois espèces sont toujours liées par la constante d'équilibre mais cet équilibre peut être déplacé par l'influence de la diffusion. Ainsi :

$$\frac{[AB]}{[A][B]} = K \Leftrightarrow [AB] = K[A][B]$$

Comme B est en grand excès, on peut considérer que sa concentration reste constante, ainsi  $[AB]$  et  $[A]$  sont proportionnelles l'une à l'autre avec un coefficient constant  $K_{obs} = K[B]$ .

Le bilan de particules s'écrit maintenant :

$$([A](x,t+dt) - [A](x,t))Sdx = (j_N(x,t) - j_N(x+dx,t))Sdt - \delta N_{A,consommé}$$

Bilan sur l'espèce AB :

$$([AB](x,t+dt) - [AB](x,t))Sdx = \delta N_{AB,créé} = \delta N_{A,consommé}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial [A]}{\partial t} Sdxdt &= -\frac{\partial j_N}{\partial x} Sdxdt + \frac{\partial [AB]}{\partial t} Sdxdt \Rightarrow \frac{\partial [A]}{\partial t} = -\frac{\partial j_N}{\partial x} - K[B] \frac{\partial [A]}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial [A]}{\partial t} (1 + K[B]) &= D \frac{\partial^2 [A]}{\partial x^2} \Rightarrow D' = \frac{D}{1 + K[B]} \end{aligned}$$

# TH27 – Diffusion d’atomes dans un solide

1) La loi de Fick s’écrit  $J = -D \frac{\partial c}{\partial x}$ .

$J$  est un flux de particules par unité de temps et s’exprime donc en  $m^{-2}, s^{-1}$ ; comme  $c$  s’exprime en  $m^{-3}$  et  $x$  en  $m$ ,  $D$  s’exprime en  $m^2, s^{-1}$ .

2) Le nombre de particules sortant d’une surface  $S$  du plan d’abscisse  $(x + dx)$  pendant la durée  $dt$  est :

$$SJ(x + dx, t) dt.$$

Le nombre de particules entrant par une surface  $S$  du plan d’abscisse  $x$  pendant la durée  $dt$  est :

$$SJ(x, t) dt.$$

Le nombre de particules dans le volume  $S dx$  varie de  $\frac{\partial(cS dx)}{\partial t} dt$  pendant cette même

durée  $dt$ ; ainsi :

$$-J(x + dx, t) + J(x, t) = dx \frac{\partial c}{\partial t}$$

soit : 
$$-\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x}$$

3) La combinaison des deux équations précédentes donne immédiatement l’équation de diffusion, soit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

4) À partir de la fonction  $c(x, t)$  proposée, on calcule :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = e^{-\frac{x^2}{A}} \left[ \frac{dB}{dt} + \frac{Bx^2}{A^2} \frac{dA}{dt} \right]$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = e^{-\frac{x^2}{A}} \left[ -\frac{2B}{A} + \frac{4B}{A^2} x^2 \right].$$

L’équation de la diffusion conduit donc à :

$$\left[ \frac{dB}{dt} + \frac{Bx^2}{A^2} \frac{dA}{dt} \right] = D \left[ -\frac{2B}{A} + \frac{4B}{A^2} x^2 \right].$$

Or cette équation est vérifiée pour tout  $x$ , on peut donc annuler séparément le terme ne dépendant pas de  $x$  et le terme en  $x^2$  :

$$\frac{dA}{dt} = 4D \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dB}{dt} = -2D \quad (2).$$

Les conditions initiales sont :

- $c(0, 0) \rightarrow \infty$ , en effet,  $Q \neq 0$  pour une épaisseur nulle ;
- $c(x, 0) = 0$ .

Donc  $A(0) = 0$  et  $B(0) \rightarrow \infty$ . Ceci permet de donner  $A(t) = 4Dt$  par intégration de (1).

De plus (2) conduit, avec  $A(t) = 4Dt$ , à  $\frac{dB}{dt} = -\frac{B}{2t}$ ,

d’où  $B(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$  qui remplit déjà la condition sur  $B(0)$ ; il faut, pour déterminer la constant

d’intégration  $K$ , utiliser la conservation du nombre de particules :

$$\int_0^\infty c(x, t) dx = Q, \text{ soit :}$$

$$\frac{K}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = Q;$$

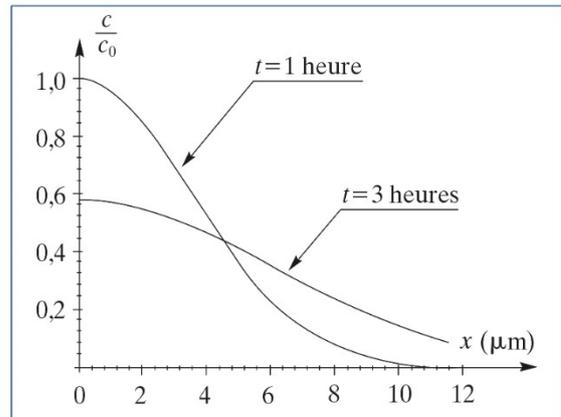
en utilisant le changement le variable  $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ ,

il vient : 
$$\frac{K}{\sqrt{t}} \sqrt{4Dt} \int_0^\infty e^{-u^2} du = Q,$$

soit  $K = \frac{Q}{\sqrt{\pi D}}$ , d’où  $B(t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi D}} \frac{1}{\sqrt{t}}$

et 
$$c(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi D}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

5) En utilisant  $c(x, t) = c(0, t) e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ , on obtient  $h = 2\sqrt{Dt}$  et  $D = 1,7 \cdot 10^{-15} m^2, s^{-1}$ .  
Les courbes ci-dessous représentent  $c(x, t = 1 h)$  et  $c(x, t = 3 h)$  rapportées à la référence  $c(0, t = 1 h)$ .



# TH28 – Diffusion de neutrons dans un réacteur nucléaire

Il n'est pas possible d'utiliser l'équation de diffusion car il y a création de neutrons. Il faut donc refaire un bilan de matière et utiliser ensuite la loi de Fick.

Le nombre de neutrons entre les sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$  est :

$$dN(r, t) = n(r, t) dV = n(r, t) 4\pi r^2 dr.$$

La variation de ce nombre pendant la durée  $dt$  s'effectue à  $r$  fixé donc :

$$dN(r, t + dt) - dN(r, t) = 4\pi r^2 dr \frac{\partial n}{\partial t} dt.$$

Pendant la durée  $dt$ , les neutrons peuvent :

- être absorbés par un noyau entre les deux sphères ;
- être créés par fission dans le volume entre les deux sphères ;
- entrer par diffusion au niveau de la sphère de rayon  $r$  ;
- sortir par diffusion au niveau de la sphère de rayon  $r + dr$ .

Le flux de neutrons à travers une surface

$$\Sigma \text{ est } \phi = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} d\vec{S}.$$

Le vecteur normal à une sphère est  $\vec{e}_r$  et  $j$  ne dépend que de  $r$  et de  $t$ . D'où :

$$\phi(r, t) = j(r, t) S(r) = 4\pi r^2 j(r, t)$$

à travers une sphère de rayon  $r$ .

**Attention**, les surfaces des sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$  sont différentes :

$$\begin{aligned} \phi(r + dr, t) &= j(r + dr, t) S(r + dr) \\ &= 4\pi (r + dr)^2 j(r + dr, t). \end{aligned}$$

Ne développez pas l'expression

$\phi(r, t) - \phi(r + dr, t)$ , utilisez la relation :

$$\phi(r + dr, t) - \phi(r, t) = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr.$$

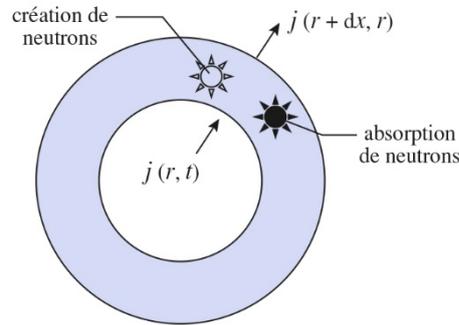
Contrairement au cas où il n'y a pas apport de matière, le flux  $\phi(r)$  n'est pas indépendant de  $r$  en régime permanent car il y a création de neutrons. En régime permanent, le nombre de neutrons créés dans la sphère de rayon  $r$  par unité de temps est égal au flux de neutrons à travers sa surface soit :

$$\int_0^r (K - 1) \frac{\alpha v}{\ell} n(x) 4\pi x^2 dx = \phi(r).$$

En dérivant cette expression par rapport à  $r$  et après simplifications, on trouve :

$$(K - 1) \frac{\alpha v}{\ell} r^2 n(r) = \frac{d(r^2 j)}{dr}.$$

1) Effectuons un bilan du nombre de neutrons contenus entre deux sphères voisines de rayons  $r$  et  $r + dr$ , pendant une durée  $dt$  (cf figure ci-dessous).



L'accroissement algébrique du nombre de neutrons dans le volume compris entre ces deux sphères, soit  $4\pi r^2 dr \frac{\partial n}{\partial t}$  est dû à la différence entre les flux :

- entrant  $\phi(r, t) = 4\pi r^2 j(r, t)$
- et sortant  $\phi(r + dr, t) = 4\pi (r + dr)^2 j(r + dr, t)$  ;

à laquelle s'ajoute la différence entre les neutrons créés et les neutrons absorbés dans le volume compris entre les deux sphères :

- $\alpha n_1 (4\pi r^2 dr) dt$  neutrons absorbés,
- $\alpha K n_1 (4\pi r^2 dr) dt$  neutrons créés,

où  $n_1$  représente le nombre de collisions neutron-noyau par unité de volume et de temps.

Le temps entre deux chocs pour un neutron est  $\tau = \frac{\ell}{v}$  donc  $n_1 = \frac{nv}{\ell}$  ;

$$(j(r, t) 4\pi r^2 - j(r + dr, t) 4\pi (r + dr)^2) dt = -4\pi \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r} dr dt ; \text{ nous obtenons}$$

ainsi, après quelques simplifications élémentaires l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 j) + (K - 1) \frac{\alpha v}{\ell} n.$$

Il reste à utiliser la loi de Fick :

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \text{ conduit à } j = -D \frac{\partial n}{\partial r}.$$

Il vient finalement  $\frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + (K - 1) \frac{\alpha v}{\ell D} n$

et le coefficient positif  $B^2$  vaut  $B^2 = (K - 1) \frac{\alpha v}{\ell D}$ .

2)a) En régime permanent,  $n$  ne dépend plus que de  $r$  et l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dn}{dr} \right) + B^2 n = 0$$

soit encore, en utilisant l'aide apportée par l'énoncé :

$$\frac{d^2(rn)}{dr^2} + B^2(rn) = 0.$$

Souvent dans un problème à symétrie sphérique où on étudie une grandeur physique  $f(r)$ , l'introduction de la fonction  $g(r) = r^\alpha f(r)$  avec  $\alpha = 1$  ou  $2$  permet d'obtenir une équation différentielle plus simple. Ici  $g(r) = r n$  vérifie l'équation différentielle  $g'' + B^2 g = 0$ .

La condition aux limites en  $r = 0$  se traduit par deux relations  $g(0) = 0$  ( $n$  n'est pas infini en  $0$ ) et  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g(r)}{r} = n_0$ .

N'oubliez jamais qu'une concentration doit toujours rester positive.

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$rn = n_1 \sin Br + n_2 \cos Br$$

et les constantes d'intégration  $n_1$  et  $n_2$  sont déterminées par les conditions aux limites :

en  $r = 0$ ,  $n$  doit rester fini et égal à  $n_0$  ce qui impose :

$$n_2 = 0 \text{ et } n_1 = \frac{n_0}{B} \text{ puisque } \frac{n_1 \sin Br}{r} \rightarrow n_1 B \text{ lorsque } r \rightarrow 0$$

$$\text{d'où : } n(r) = \frac{n_0}{Br} \sin Br$$

**2) b)** En outre,  $n$  doit s'annuler pour  $r = b$ , ce qui impose  $Bb = m\pi$  ( $m$  entier).

Or,  $n$  doit bien évidemment rester positif et l'entier  $m$  ne peut qu'être égal à  $1$  ; le rayon du réacteur doit donc avoir la valeur critique :

$$a_0 = b_0 - 0,7 \ell = \frac{\pi}{B} - 0,7 \ell.$$

**2) c)** Application numérique :

$$N_P = \frac{\rho}{A} = 4,97 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}; \ell = \frac{1}{N_P \sigma} = 3,41 \cdot 10^{-2} \text{ m};$$

$$B^2 = (K - 1) \frac{\alpha v}{1D} = 1,54 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2};$$

$$a_0 = \frac{\pi}{B} - 0,7 \ell = 5,62 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2} \text{ soit } 5,62 \text{ cm};$$

$$\text{masse critique de plutonium} = \rho \frac{4}{3} \pi a_0^3 \approx 14,7 \text{ kg}.$$

**3) a)** Si  $a$  est différent de  $a_0$ , les conditions aux limites ne sont plus satisfaites et la solution précédente ne convient pas : le réacteur ne peut pas fonctionner en régime stationnaire.

Qualitativement, on peut remarquer que quand on augmente le rayon du réacteur, on augmente la probabilité d'absorption des neutrons et on favorise la fission et inversement :

- si  $a > a_0$ , le réacteur est instable et diverge (explosion nucléaire) ;
- si  $a < a_0$ , le réacteur est instable et s'arrête.

**3) b)** L'équation différentielle  $\frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + B^2 n$  devient :

$$\frac{1}{D} f'(t) g(r) = f(t) g''(r) + B^2 f(t) g(r).$$

En divisant les deux membres par le produit  $f(t) g(r)$  supposé non nul :

$$\frac{1}{D} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(r)}{g(r)} + B^2.$$

Le membre de gauche est une fonction du temps, celui de droite une fonction de  $r$ . Ils sont donc égaux à une constante  $\beta$ .

$g(r)$  vérifie alors  $g''(r) + (B^2 - \beta) g(r) = 0$ . La fonction  $g(r)$  s'annule pour  $r = 0$  et  $r = b$ , et c'est une fonction sinusoidale de  $r$  :  $g(r) = A \sin(kr)$  avec  $k^2 = B^2 - \beta$ .

La méthode de résolution d'une équation différentielle à variables séparées est à connaître. Pour connaître le signe de la constante apparaissant dans cette méthode, il est utile de savoir qu'une fonction hyperbolique du type

$a \exp(rt) + b \exp(-rt)$  s'annule au plus une fois, ce n'est pas le cas d'une fonction sinusoidale. Donc, une fonction s'annulant deux fois et vérifiant l'équation différentielle  $f''(x) = a f(x)$  est sinusoidale et impose  $a < 0$ .

De plus,  $n(r, t)$  et  $g(r)$  ne pouvant pas changer de signe  $k = \frac{\pi}{b}$  et  $\beta = B^2 - \frac{\pi^2}{b^2}$

ou, en introduisant  $b_0$  de la question 2) :

$$\beta = \pi^2 \left( \frac{1}{b_0^2} - \frac{1}{b^2} \right).$$

Par ailleurs,  $f(t)$  vérifie  $f'(t) = \beta D f(t)$ , donc  $f(t) = f(0) e^{\beta D t}$ .

Avec les conditions initiales, nous obtenons finalement :

$$n(r, t) = n_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi r}{b}\right)}{r} e^{\beta D t}.$$

Par suite, si  $a > a_0$  et  $b > b_0$ , nous constatons que  $\beta$  est positif,  $n$  augmente, le réacteur peut s'emballer et exploser.

En revanche, si  $a < a_0$  et  $b < b_0$ ,  $n$  diminue et le réacteur peut s'arrêter.

Il faut donc un contrôle très strict du nombre de neutrons dans les réacteurs nucléaires pour éviter que ces réacteurs ne s'emballent ou ne s'arrêtent. « Heureusement » lors de l'emballlement d'un réacteur, l'explosion du cœur dilue la matière fissible et arrête très rapidement la réaction en chaîne, ce n'est pas le cas d'une bombe nucléaire où un explosif chimique confine la matière fissible pendant la durée de la réaction de fission.